



# Le théorème de l'angle inscrit au collège : analyse d'une séance d'introduction.

Eric Roditi

## ► To cite this version:

Eric Roditi. Le théorème de l'angle inscrit au collège : analyse d'une séance d'introduction.. Petit x, 2004, 66, pp.18-48. halshs-00349760

**HAL Id: halshs-00349760**

**<https://shs.hal.science/halshs-00349760>**

Submitted on 4 Jan 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# LE THÉORÈME DE L'ANGLE INSCRIT AU COLLÈGE

## ANALYSE D'UNE SÉANCE D'INTRODUCTION

Eric Roditi, Equipe DIDIREM de l'université Paris 7

### Introduction

De façon très générale, notre intérêt pour les pratiques enseignantes vient de l'idée que l'apprentissage des élèves dépend de leur activité mathématique qui dépend elle-même beaucoup de l'enseignement dispensé en classe. Par exemple, un énoncé mathématique étant proposé par le professeur, l'activité des élèves dépendra du temps dont ils vont disposer pour l'étudier, des échanges qu'ils pourront avoir entre eux, des questions posées (par l'énoncé, par les élèves ou par le professeur), des aides qui seront apportées, du partage des responsabilités entre le professeur et les élèves dans l'élaboration de démarches pour répondre aux questions, dans la validation des réponses obtenues, etc.<sup>1</sup> Et tout cela ne peut être connu qu'en allant dans la classe.

L'ambition de cet article est d'exposer des outils pour analyser des pratiques enseignantes et de montrer un exemple de leur mise en œuvre. Ces outils ont été élaborés pour mener des travaux de recherche en didactique. Une première et courte partie de l'article explique quelles analyses de pratiques nous menons car cette expression « analyse de pratiques » recouvre aujourd'hui une grande diversité. Puis l'article expose les outils, les légitime, et les illustre par l'analyse d'une séance d'enseignement en classe de troisième à partir, en autres documents, de son enregistrement vidéo.

### I. Une analyse des pratiques qui croise deux approches

Par notre travail de recherche sur les pratiques des professeurs de mathématiques nous visons l'amélioration des apprentissages relatifs à cette discipline, en situation scolaire. Pour chaque élève, nous admettons que la dynamique de son apprentissage est influencée par l'enseignement qu'il reçoit en classe, et nous admettons que, sans prendre en compte d'autres variables que celles qui sont liées à l'enseignement reçu, les analyses permettent malgré tout d'interpréter cette dynamique de façon pertinente. Ce faisant, nous n'ignorons pas qu'elle dépend de variables qui échappent à la seule situation de classe, comme l'histoire sociale et personnelle de l'élève.<sup>2</sup> Nous n'ignorons pas non plus qu'elle s'accomplit dans d'autres lieux que le collège ou que le lycée et que, même en classe, cette dynamique n'est pas entièrement sous la responsabilité du professeur.

#### 1. Une approche de l'enseignant comme une personne en situation de travail

Les travaux de recherche fondés sur la *théorie anthropologique du didactique* élaborée par Yves Chevallard (1992, 1999) montrent les contraintes institutionnelles qui s'exercent sur l'enseignement et sur les professeurs. Ils montrent aussi les alternatives par un questionnement systématique des possibles issu de la problématique écologique. D'autres auteurs, comme Claire Margolinas (2002), travaillent la question de l'enseignant au sein de la *théorie des situations didactiques* de Guy

<sup>1</sup> Il y a dix ans environ, par une analyse du discours de l'enseignant, Élise Josse et Aline Robert montraient que le même projet d'enseignement des homothéties en classe de Seconde était animé de façon sensiblement différente en classe par deux professeurs. Récemment, Éric Roditi a montré dans sa thèse qu'à partir de projets assez semblables d'enseignement de la multiplication des décimaux et des énoncés d'exercices analogues tirés du même manuel scolaire, les professeurs de quatre classes de Sixième ont provoqué chez leurs élèves des activités très hétérogènes d'une classe à l'autre.

<sup>2</sup> Des travaux comme ceux qui sont menés par l'équipe ESCOL en témoignent de façon convaincante, voir par exemple : Bernard Charlot, Elisabeth Bautier & Jean-Yves Rochex (1992), *École et savoir dans les banlieues... et ailleurs*.

Brousseau (1998) et montrent que les choix concernant le projet – et notamment ceux qui portent sur les contenus – ont des implications lourdes sur l'action de l'enseignant. Des questions demeurent. Quels sont les choix des enseignants dans cet espace des possibles ? Comment les contraintes se traduisent-elles dans leur activité ? Ces traductions sont-elles uniformes ou existe-t-il une variabilité des pratiques enseignantes ?

Les travaux entrepris par Aline Robert et Janine Rogalski (2002), qui mènent respectivement des recherches en didactique des mathématiques et en psychologie ergonomique, ont conduit à l'élaboration d'un cadre théorique qu'elles ont appelé « la double approche didactique et ergonomique des pratiques enseignantes ». Elles développent une entrée selon laquelle l'enseignant exerce un métier fondé sur des savoir-faire communs où chaque professionnel développe des moyens pour concilier des fins pédagogiques et des impératifs qui s'expriment par rapport à lui, et pas seulement par rapport à ses élèves. Cette entrée, que nous utilisons ici, permet de traiter de manière imbriquée les pratiques enseignantes « tournée vers les élèves » et leur apprentissage, et les pratiques enseignantes « tournée vers l'enseignant » lui-même, ces deux aspects pouvant être complémentaires mais aussi, parfois, concurrentiels.

## **2. Une approche résolument didactique des situations d'enseignement**

Notre approche des pratiques enseignantes est orientée : elle vise essentiellement à la compréhension, et à l'amélioration éventuelle, de l'apprentissage mathématique des élèves. Cela explique pourquoi le savoir mathématique est une variable omniprésente dans nos analyses.

Les recherches en didactique ont produit des outils d'analyse des situations d'enseignement pour les contenus mathématiques qui sont abordés ainsi que pour les activités qu'elles sont susceptibles de provoquer et les apprentissages qui en découlent. Une analyse d'un problème organisée comme le propose Régine Douady (1987) en faisant jouer les possibles *changements de cadre* (numérique, géométrique, algébrique, graphique...) conduit à une production et à une analyse des méthodes de résolution. Les études fondées sur la *théorie des situations didactiques* et enrichie par Claire Margolinas (1995) produisent des analyses *a priori* et *a posteriori* du travail de l'élève confronté à un problème. Les études les plus récentes prennent en compte le travail de l'enseignant. Les travaux fondés sur la notion de *praxéologie* développée par Yves Chervallard (1999) produisent quant à eux des analyses des mathématiques (techniques, technologies et théories) relatives à un type de tâche donné qui permettent, compte tenu de l'organisation didactique, de présager du travail de l'élève compte tenu de la place (le *topos*) qui lui est attribuée par le professeur. Aline Robert (1998, 2003, 2004) propose quant à elle des outils qui permettent d'analyser les énoncés de problèmes mathématiques pour l'activité mathématique qu'ils peuvent provoquer.

Un effort théorique a été mené, par Marie-Jeanne Perrin (1999) quant à la notion de milieu, pour montrer ce qu'apportent les différentes approches didactiques des situations d'enseignement. Comme en témoigne un récent travail d'analyse d'une situation d'introduction du tableau de signe en classe de Seconde qui a été mené par différents IREM (2003), les analyses produites avec ces différents cadres ne sont pas contradictoires et possèdent des aspects complémentaires.

Les travaux pour lesquels ont été élaborés les outils que nous allons présenter partent des pratiques enseignantes ordinaires pour penser le système dans lequel elles s'inscrivent, avec ses contraintes diverses. Il ne s'agit cependant pas d'une démarche purement pragmatique : comme nous allons le montrer ici, nos analyses qui s'appuient sur la double approche didactique et ergonomique sont fondées par deux références théoriques, celle de la didactique des mathématiques et celle de la psychologie ergonomique.

## **3. Problématique générale et éléments de méthodologie**

Le choix majeur, effectué pour mener les recherches qui ont produit les outils que nous allons présenter, est donc de travailler à partir d'observations de classes en retenant principalement trois observables : l'environnement professionnel du professeur, son activité en classe ainsi que celle de ses élèves. Par activité d'un sujet, nous comprenons davantage que sa seule action, nous entendons

ce qu'il fait (ce qu'il dit, ce qu'il écrit, ce qu'il montre...) mais aussi ce qu'il ne fait pas, et encore ce qu'il pense avant de faire ou de ne pas faire, pendant et après.<sup>3</sup>

#### *a) Problématique générale de nos analyses des pratiques enseignantes*

Le professeur en classe répond à une demande multiple (y compris son propre désir d'enseignement) pour laquelle il subit des contraintes et dispose de marges de manœuvre : il enseigne des notions et des méthodes mathématiques conformément à un programme officiel et à des exigences propres liées à des considérations épistémologiques et à des conceptions pédagogiques. Son enseignement est gouverné par des contraintes mais aussi par des habitudes et des usages dont certains sont personnels et d'autres sont liés à son établissement d'exercice ou au milieu professionnel dans lequel il est inséré. Dans ses préparations, ses évaluations, ses interactions avec la classe, il tient compte de ses élèves, de leurs connaissances, de leurs aptitudes, de leurs difficultés...

Dans notre travail de chercheur, nous analysons l'enseignement dispensé en classe, nous cherchons à comprendre d'une part quelle est cette demande multiple à laquelle le professeur répond par son activité et d'autre part comment cette activité que nous décrivons constitue une réponse à cette demande. Nous cherchons à identifier les contraintes d'enseignement et les marges de manœuvre, et à comprendre, à travers la régularité et la variabilité des pratiques, comment ces contraintes et ces marges de manœuvre sont investies.

#### *b) Éléments méthodologiques*

Nous partons des pratiques enseignantes ordinaires pour penser le système dans lequel elles s'inscrivent, avec ses contraintes diverses. Ce que nous retenons d'abord d'une séance est lié au savoir mathématique et nous utilisons des critères qui spécifient l'enseignement de ce savoir. Ils précisent la nature du travail demandé aux élèves et l'accompagnement de leur activité par le professeur : la progression proposée, le contenu mathématique abordé et les méthodes utilisées, les discours oraux ou écrits, mathématiques ou non, le partage des responsabilités scientifiques entre le professeur et les élèves et les modalités de travail des élèves. Pour disposer de toutes ces données, les séances d'enseignement sont enregistrées, de préférence au magnétoscope plutôt qu'au magnétophone, et retranscrites. Nous étudions aussi les documents donnés aux élèves ainsi que les sources et les notes éventuelles de la préparation des cours. Sauf impossibilité, des entretiens ont lieu avant et après les cours qui permettent de recueillir des informations sur une partie difficilement accessible et pourtant fondamentale de l'activité du professeur : ce qu'il n'a pas voulu faire, ce qu'il avait envisagé de faire mais qu'il n'a pas fait...

Nous tenons compte des contraintes institutionnelles qui fixent le programme (le contenu enseigné et sa progression sur l'ensemble de la scolarité), le volume horaire dont disposent les professeurs, l'organisation du système scolaire, le nombre d'élèves dans les classes avec éventuellement des différences suivant les implantations sociologiques des établissements d'exercices. Ces informations sont recueillies à la lecture des textes officiels et de données spécifiques à l'établissement d'exercice du professeur.

Nous repérons les contraintes sociales : elles sont liées d'une part aux habitudes de la profession et d'autre part aux attentes diverses des professionnels de l'institution (notamment l'inspection) et de l'établissement scolaire (l'administration, les collègues, etc), des parents et des élèves. Des contraintes liées à l'exercice même du métier sont prises en compte : le fait qu'il faille mener l'ensemble de la classe malgré son hétérogénéité, gérer les interactions avec les élèves, et aussi tenir compte du temps qui passe. Les éléments sont recueillis à la fois par l'observation des séances d'enseignement et des entretiens avec le professeur, ils sont confrontés aux résultats obtenus par les recherches antérieures.

---

<sup>3</sup> Pour l'activité du professeur, nous nous référons à Jacques Leplat (1997), *Regards sur l'activité en situation de travail*, ainsi qu'aux travaux de Janine Rogalski sur l'enseignant (2003).

Nous prenons en compte le professeur en tant qu'individu en situation de travail. Sa formation, son expérience, son ancienneté dans l'établissement d'exercice, les conceptions qu'il a de la discipline qu'il enseigne, de son enseignement et de son apprentissage, son goût ou sa tolérance au risque, son besoin de confort, sa résistance aux situations conflictuelles, etc. sont autant d'éléments personnels qui influent sur la pratique du professeur. Nous ne disposons pas de toutes ces informations pour analyser quelques heures de cours mais nous avons parfois besoin de recourir à certaines d'entre elles pour comprendre un épisode particulier.

#### 4. Le cas de la séance dont nous proposons l'analyse

Les outils généraux d'analyse qui ont été présentés dans le paragraphe précédent vont être maintenant à la fois précisés et mis en œuvre pour étudier une séance d'introduction du théorème de l'angle inscrit<sup>4</sup> dans une classe de troisième. Par cette étude nous montrerons les conditions (au sens de contraintes) d'enseignement de cette séance et quelles en étaient les marges de manœuvre, et nous présenterons les choix effectués par le professeur tout en indiquant les alternatives envisageables.

L'étude croise trois analyses : une analyse préalable de la notion et de son enseignement dans le contexte institutionnel qui était celui du professeur, une analyse du projet élaboré par le professeur pour la classe dont il a la charge ainsi qu'une analyse du déroulement de la séance.

## II. Analyse préalable : la notion enseignée et les séances possibles

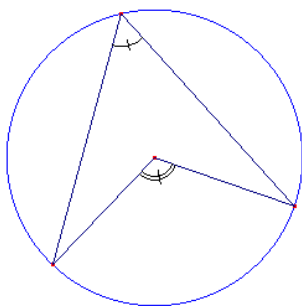
De façon générale, dans l'analyse préalable de la séance, nous commençons par la notion enseignée ; nous indiquons ensuite les possibilités de l'enseignant pour mener la séance : le contenu mathématique qui peut être enseigné et les types de tâches mathématiques qui pourront être proposées aux élèves. Comme l'objectif est de comprendre les contraintes et les marges de manœuvre de cet enseignement, nous explicitons les instructions officielles qui, d'une certaine manière, fixe les trois contraintes majeures : les connaissances supposées acquises des élèves, les compétences à acquérir, et la durée de l'enseignement.

### 1. Le théorème de l'angle inscrit

Commençons donc par une présentation sommaire de la notion enseignée : le théorème de l'angle inscrit et sa conséquence sur l'égalité des mesures des angles qui interceptent le même arc. Tels qu'ils sont étudiés en France au collège depuis 1985, les deux propriétés sont exactement les propositions n°20 et n°21 que formule Euclide dans son Livre III consacré entièrement à l'étude du cercle.

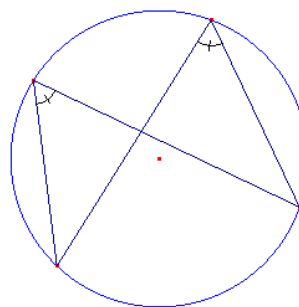
#### Proposition n°20

Dans un cercle, la mesure de l'angle au centre est égale au double de la mesure de tout angle inscrit qui intercepte le même arc.



#### Proposition n°21

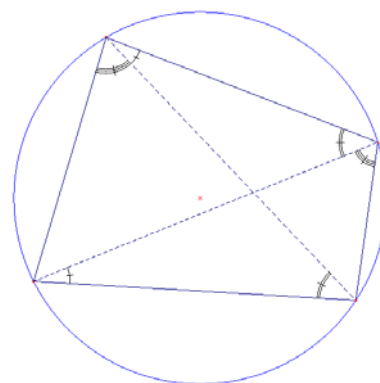
Dans un cercle, deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure.



<sup>4</sup> Nous employons l'expression « théorème de l'angle inscrit » pour désigner la relation entre la mesure en degré d'un angle géométrique inscrit dans un cercle – sans côté tangent au cercle – et celle de l'angle géométrique au centre qui intercepte le même arc. De même, comme c'est l'usage actuellement, nous omettons de préciser que l'angle géométrique est inscrit dans un cercle et nous utiliserons l'expression « angle inscrit » sans autre précision.

## Proposition n°22

Ces deux propositions précèdent la propriété des quadrilatères inscrits dans un cercle. Comme le montre la figure ci-contre, la proposition n°21 permet d'établir que les huit angles géométriques que forment le quadrilatère et ses diagonales sont deux à deux de même mesure et que, par conséquent, les angles opposés de tout quadrilatère inscrit sont supplémentaires (proposition n°22). Ces propriétés constituent des outils pour établir des égalités portant sur des mesures d'angles.



Ces propriétés admettent des réciproques. Soit un cercle et trois points A, B, C deux à deux distincts de ce cercle ; si un point P du demi-plan de frontière (AB) contenant C vérifie l'égalité  $\widehat{ACB} = \widehat{APB}$  alors les quatre points A, B, C et P sont cocycliques et P appartient au même arc d'extrémités A et B que le point C. Si les angles opposés d'un quadrilatère sont supplémentaires, alors les sommets de ce quadrilatère sont cocycliques.

Les questions relatives aux points cocycliques sont traitées par Euclide dans le livre IV, elles ne sont pas enseignées au collège à l'exception de la propriété caractéristique des triangles rectangles. Cette caractérisation figure elle-même dans le livre III sous la proposition n°31, c'est-à-dire, contrairement à ce qui est proposé dans l'enseignement français actuel, après le théorème de l'angle inscrit.

La proposition n°20 s'établit par addition d'angles géométriques, ce qui est contraignant. Ces angles, en effet, ne sont pas orientés et cela impose une attention particulière : lorsque les angles  $(Ox ; Oy)$  et  $(Oy ; Oz)$  sont saillants, l'égalité  $(Ox ; Oz) = (Ox ; Oy) + (Oy ; Oz)$  n'est pas assurée en toute généralité, il faut savoir si la demi-droite  $[Oz)$  est ou n'est pas incluse dans le secteur saillant du plan que délimitent  $[Ox)$  et  $[Oy)$ , il faut aussi savoir si l'angle  $(Ox ; Oz)$  est l'angle saillant ou l'angle rentrant. L'addition des angles géométrique impose donc une étude de cas préalable, les angles orientés font disparaître ce problème.

Voici une démonstration classique du théorème de l'angle inscrit. L'arc intercepté étant noté  $\widehat{AB}$ , l'angle au centre  $\widehat{AOB}$  et l'angle inscrit  $\widehat{AMB}$ , l'idée directrice est de tracer la demi-droite  $[MO)$  qui recoupe le cercle en un point P (figure n°1) pour utiliser la configuration du triangle inscrit dans un demi-cercle (figure n°2).

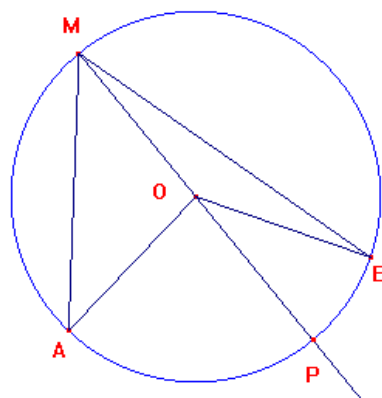


figure n°1

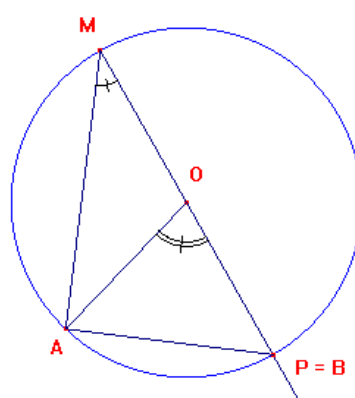


figure n°2

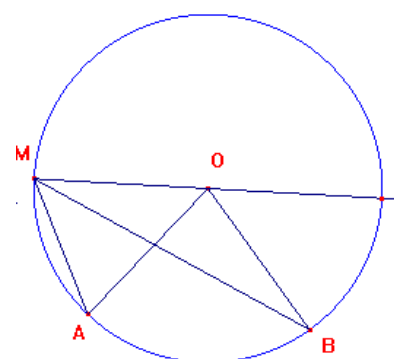


figure n°3

Si la demi-droite  $[MP)$  est un des côtés de l'angle  $\widehat{AMB}$  (par exemple le côté  $[AB)$  comme l'illustre la figure n°2), les points M, O et B sont alignés donc :

$$\text{mes}(\widehat{AOB}) = 180 - \text{mes}(\widehat{MOA}).$$

Le triangle OMA étant isocèle en O, on en déduit que :

$$180 - \text{mes}(\widehat{MOA}) = 2 \times \text{mes}(\widehat{AMO}).$$

Puisque  $\widehat{AMO} = \widehat{AMB}$ , par transitivité de l'égalité, on conclut que :

$$\text{mes}(\widehat{AOB}) = 2 \times \text{mes}(\widehat{AMB}).$$

Si la demi-droite [MP) n'est pas l'un des deux côtés de l'angle  $\widehat{AMB}$ , alors soit elle est incluse dans le secteur angulaire saillant  $\widehat{AMB}$  (figure n°1) soit elle ne l'est pas (figure n°3). Dans les deux cas, on applique l'égalité établie précédemment aux deux triangles MAP et MBP et on obtient les deux égalités :

$$\text{mes}(\widehat{AOP}) = 2 \times \text{mes}(\widehat{AMP}) \text{ et } \text{mes}(\widehat{BOP}) = 2 \times \text{mes}(\widehat{BMP}).$$

Alors, après addition (cas de la figure n°1) ou soustraction (cas de la figure n°3) et factorisation, on peut conclure que :

$$\text{mes}(\widehat{AOB}) = 2 \times \text{mes}(\widehat{AMB}).$$

## 2. Les contenus mathématiques de la séance, analyse a priori

Nous appelons « champ mathématique »<sup>5</sup> d'une séance (d'une séquence) l'ensemble des contenus mathématiques relatifs à la séance (la séquence). En référence à la théorie des champs conceptuels (Gérard Vergnaud 1990) ces contenus sont les notions, les situations, les représentations symboliques et leurs transformations éventuelles, les propriétés et les théorèmes. Deux études du champ mathématique d'une séance sont envisagées : celle que nous proposons ici et qui décrit précisément, *a priori*, les contenus relatifs à une séance d'introduction au théorème de l'angle inscrit ; celle que nous proposerons ensuite et qui décrit les contenus effectivement proposés durant la séance filmée.

Après avoir cité les instructions officielles qui précisent ce qui doit être enseigné et, au moins implicitement, sur quels acquis repose l'enseignement, nous indiquons les contenus relatifs à la séance en distinguant ceux qui sont à acquérir au niveau d'enseignement de la séance étudiée (ici la classe de troisième) et ceux qui ont été étudiés durant les années antérieures.

### a) Les instructions officielles

À propos du théorème de l'angle inscrit, le programme de la classe de troisième<sup>6</sup> indique une seule compétence exigible :

*Comparer un angle inscrit et l'angle au centre qui intercepte le même arc.*

Un commentaire précise :

*On généralise le résultat relatif à l'angle droit (4e). Cette comparaison permet celle de deux angles inscrits interceptant le même arc mais la recherche de l'ensemble des points du plan d'où l'on voit un segment sous un angle donné est hors programme.*

Ce contenu est présenté au sein d'un thème triple regroupant les angles, les rotations et les polygones réguliers.

<sup>5</sup> Les outils d'analyses sont présentés et mis en fonctionnement. Ils ont été élaborés lors de recherches précédentes et particulièrement dans notre travail sur l'enseignement de la multiplication des décimaux, voir Roditi (2001). Leur justification reste ici assez globale, une argumentation des choix plus détaillée figure dans les travaux de recherche à l'origine de ces outils, ils sont cités en bibliographie.

<sup>6</sup> Bulletin officiel, Hors-Série n°10 du 15 octobre 1998.

### *b) Les connaissances anciennes*

Des notions supposées acquises durant les trois années précédentes du collège peuvent intervenir au début de l'enseignement du théorème de l'angle inscrit, elles sont relatives au cercle et aux angles et à leur mesure. Comme dans toute l'étude des angles au collège, les questions relatives à la définition des angles et à leur mesure sont laissées dans l'ombre : l'approche de ces notions reste intuitive. L'étude du théorème de l'angle inscrit soulève une question d'existence et d'unicité qui, elle aussi, reste cachée : pour tout angle inscrit, il existe un unique angle au centre qui intercepte le même arc. En dehors du domaine géométrique, interviennent la notion de rapport de deux mesures (notamment le rapport double - moitié) ainsi que la transitivité de l'égalité pour établir le théorème de l'angle inscrit et l'égalité des mesures de deux angles inscrits qui interceptent le même arc comme un corollaire de ce théorème. Précisons davantage les notions qui pourront être mobilisées durant la séance.

- Le cercle : il s'agit de reconnaître et éventuellement de nommer des objets relatifs au cercle : son centre, son rayon et ses rayons ; l'arc de cercle en distinguant le petit, le grand et le demi-cercle ; le cercle circonscrit à un triangle donné ou les triangles inscrits dans un cercle donné avec le cas particulier du triangle rectangle. Remarquons que la distinction entre petit arc et grand arc est ici fondamentale, elle est souvent montrée en classe de sixième à l'occasion d'une « leçon de choses sur le cercle » mais très brièvement et cette distinction n'est plus mobilisée jusqu'en classe de troisième.

- Les angles : il s'agit de reconnaître et de savoir désigner les angles de plusieurs configurations et d'utiliser quelques propriétés de la mesure des angles en degré. La confusion est entretenue entre un angle et sa mesure, y compris dans les notations. Hormis celles qui sont relatives à la trigonométrie, les configurations et les propriétés vues durant les années antérieures sont : les angles rentrants ou saillants ; les angles adjacents, supplémentaires, complémentaires, opposés par le sommet ; les angles formés par deux parallèles et une sécante ; les angles du triangle et des quadrilatères particuliers ; la somme de mesures deux angles adjacents, la somme des mesures des angles d'un triangle. La remarque formulée sur la distinction entre petit arc et grand arc se renouvelle exactement dans les mêmes termes à propos de la distinction entre les angles rentrants et les angles saillants.

- Les rapports : bien que la notion de rapport intervienne assez peu dans cette étude, par comparaison à celle du théorème de Thalès ou de la trigonométrie du triangle rectangle qui figurent à ce niveau, c'est la richesse des façons d'exprimer les rapports de double et de moitié qui peut poser une véritable difficulté d'ordre sémiotique quant à l'équivalence des représentations suivantes :

$$A \text{ est égal à la moitié de } B ; A = B \div 2 ; A = B/2 ; A = \frac{B}{2} ; A = \frac{1}{2} B ;$$

$$B \text{ est égal au double de } A ; B = 2 \times A \text{ et } B = 2A.$$

### *c) Les savoirs à acquérir, quelques difficultés connues*

Les élèves doivent apprendre les notions nouvelles d'angle au centre et d'angle inscrit ainsi qu'à repérer l'angle au centre interceptant le même arc qu'un angle inscrit donné.

Ces notions posent un problème d'existence et l'unicité : pour tout angle inscrit donné, il existe un unique angle au centre qui intercepte le même arc alors qu'il existe une infinité d'angles inscrits qui interceptent ce même arc. Les problèmes de quantification sont difficiles à ce niveau d'enseignement, et ce d'autant plus qu'ils ne figurent pas au programme. On les retrouve dans l'expression de définitions mathématiques comme celle tirée d'un manuel <sup>7</sup> où réside une certaine confusion entre « un » et « le » :

---

<sup>7</sup> Math 3e, collection Cinq sur cinq, Hachette Éducation, 1999, [p. 246].



*L'angle  $\widehat{AOB}$  est **un** angle au centre qui intercepte l'arc de cercle  $\widehat{AB}$ .*

La confusion vient de l'agrégation de deux informations, d'une part l'angle en question est *un* angle au centre, et d'autre part c'est l'angle au centre qui intercepte l'arc donné. Elle est entretenue par la phrase qui lui succède :

*L'angle  $\widehat{AMB}$  est **un** angle inscrit qui intercepte l'arc de cercle  $\widehat{AB}$ .*

Il y a encore deux informations, l'angle en question est *un* angle inscrit et c'est *un de ceux* qui interceptent l'arc donné. Les deux phrases étant construites sur le même modèle, la question d'unicité qui distingue l'angle au centre et l'angle inscrit risque fort de passer inaperçue et/ou de prêter à confusion. Le travail de l'enseignant face à ces questions nous semble devoir ne pas être négligé, qu'il choisisse de les aborder ou de les laisser dans l'ombre.

Une difficulté de reconnaissance de la configuration est connue : lorsque l'angle inscrit est obtus, l'arc intercepté est un grand arc, l'angle au centre associé est rentrant ; des élèves considèrent pourtant l'angle au centre saillant qui intercepte le petit arc. Une familiarisation avec les figures composées de triangles inscrits dans un cercle est donc nécessaire pour identifier les angles.

La relation entre la mesure d'un angle inscrit et celle de l'angle au centre qui intercepte le même arc ainsi que sa conséquence sur les mesures d'angles inscrits interceptant le même arc constituent des objets de savoir nouveaux. À ces objets correspondent toutes les situations géométriques où ils interviennent comme outils pour : déterminer la mesure d'un angle inscrit connaissant celle de l'angle au centre ou d'un autre angle inscrit interceptant le même arc, calculer la mesure d'un angle au centre connaissant celle d'un angle inscrit interceptant le même arc, démontrer que deux angles ont la même mesure parce qu'ils sont deux angles inscrits qui interceptent le même arc. Ces objectifs peuvent être intermédiaires, le calcul d'angle permet par exemple de prouver qu'un triangle est rectangle et l'égalité de deux angles permet de démontrer par exemple qu'une demi-droite est une bissectrice.

### **3. Durée d'enseignement et stratégies possibles**

Parce que nous pensons que l'apprentissage dépend non seulement des contenus mathématiques qui ont été enseignés mais aussi de l'organisation de cet enseignement, nous repérons ce que nous appelons la « stratégie d'enseignement » d'une séance (d'une séquence). Cette stratégie est élaborée par le professeur pour organiser son enseignement dans une durée et selon un itinéraire qui est déterminé principalement par des motifs cognitifs et/ou mathématiques. Ces motifs ne sont pas nécessairement partagés par tous les professeurs, un enseignant exprime certains choix dans sa stratégie, il en exprime aussi dans ses interactions avec ses élèves, c'est-à-dire dans la dimension médiative de ses pratiques. La stratégie d'enseignement est contrainte par les programmes mais aussi inspirée par une ligne directrice, spécifique ou non du contenu à enseigner : enseigner la technique et proposer de nombreuses applications, exposer le savoir et des modèles de son utilisation dans différentes situations, partir des erreurs classiques sur le sujet à traiter, introduire par une situation problème le savoir nouveau, travailler différentes représentations mentales d'un concept mathématique, etc. en sont des exemples prototypiques.

Déterminons, en respectant le programme, la durée d'une séquence complète sur l'angle inscrit. Le thème dans lequel cette séquence est inscrite comporte trois parties dont les titres sont les suivants : Image de figures par une rotation, Polygones réguliers et Angle inscrit. Les thèmes équivalents à traiter en classe de troisième sont au nombre de treize. Pour traiter l'ensemble du programme, les professeurs disposent d'environ 34 semaines d'enseignement (il faut tenir compte de la préparation et de la passation des épreuves du Brevet des Collèges) et l'horaire de la classe de troisième est fixé à 4h hebdomadaires. En conclusion, la durée de la séquence complète peut être estimée à trois ou quatre heures.

Si l'on ne tient pas compte des phases de cours et d'exercices, les stratégies d'enseignement du théorème de l'angle inscrit, envisageables *a priori* en respectant la contrainte des programmes, sont des combinaisons des étapes suivantes, une ou plusieurs d'entre elles pouvant être omise. Cette

analyse est confirmée par la lecture des propositions d'enseignements disponibles dans des revues adressées aux enseignants et/ou aux formateurs (Bulletin de l'APMEP, Petit  $x$ , Repère IREM) dans les manuels et les nombreux sites Internet qui proposent des outils pour les professeurs de mathématiques.

Comme nous l'avons vu, une démonstration du théorème de l'angle inscrit accessible à des élèves de troisième, est contrainte mathématiquement par le travail avec les angles géométriques : une dissociation de cas est indispensable. La démonstration proposée dans tous les manuels qui en proposent une complète, est analogue à celle que nous avons présentée. Certains auteurs, jugeant peut-être cette démonstration hors de portée de trop nombreux élèves de ce niveau, ne la proposent pas, ni en cours ni en exercice, et se limitent à une constatation.

Les étapes possibles qui ont été repérées sont numérotées de E1 à E6 :

- E1. Découverte du caractère outil du théorème dans une situation problématique comme celle des angles de tir ;
- E2. Conjecture du théorème, sur un ou plusieurs cas particuliers (fixés par le professeur ou non), grâce à des mesures ou en utilisant un logiciel de géométrie dynamique (des fichiers prêts à l'emploi sont téléchargeables) ;
- E2'. Conjecture de l'égalité des mesures des angles inscrits interceptant le même arc (avec les mêmes modalités possibles) ;
- E3. Preuve du théorème, éventuellement déjà conjecturé, sur un ou plusieurs cas particulier, notamment celui où l'angle inscrit est droit ;
- E4. Preuve générale du théorème, éventuellement déjà conjecturé, avec mise en évidence de la nécessité de distinguer plusieurs cas (sinon l'étape sera notée E4') ;
- E5. Relation avec le triangle inscrit dans un demi-cercle ;
- E6. Dédution, à partir du théorème de l'angle inscrit, de son corollaire sur l'égalité des mesures des angles inscrits interceptant le même arc.

Une étude plus fine des huit manuels scolaires les plus courants conduit à plusieurs constats sur les stratégies proposées. Deux équipes d'auteurs (signalées par une puce ● dans le tableau suivant) ne respectent pas le découpage thématique des instructions officielles, l'étude du théorème est insérée dans une étude plus générale sur les angles qui comprend la trigonométrie. Deux manuels (signalés par un triangle ▲) proposent une utilisation du théorème avant la page de cours : un problème conduisant à montrer l'alignement de trois points par des calculs d'angles, une application au calcul d'angles dans des polygones réguliers. Les stratégies reposent sur deux étapes au minimum et six au maximum (signalées par un losange plein ♦ dans le tableau suivant), l'ordre proposé correspond à celui de la liste. Dans quelques manuels, certaines étapes (signalées par un losange vide ◇ dans le tableau suivant) ne font pas partie de la stratégie d'enseignement ou ne sont proposées que très partiellement mais les résultats qu'elles permettent d'obtenir sont tout de même signalés dans le cours ; c'est souvent le cas de la conséquence du théorème sur les mesures des angles inscrits interceptant le même arc, c'est aussi le cas pour la démonstration du théorème ou pour la configuration du triangle inscrit dans un demi-cercle qui est enseignée en classe de quatrième et qu'on retrouve grâce au théorème de l'angle inscrit.

Remarquons enfin que, dans les figures étudiées pour construire le nouveau savoir, les arcs interceptés sont toujours petits et donc que les angles au centre sont toujours saillants ce qui n'est pas le cas dans les exercices qui suivent.

	Stratégies							
Étapes	E1	E 2	E 2'	E3	E 4	E 4'	E5	E6
Descriptif des étapes	Problème introdutif	Conject ure Cor.		Preuve cas particulier	Preuve générale		Le triangle rectangle	Déductio n du corollaire
Belin, Décimale						♦		♦
Bordas, Math (●)				♦		♦		
Bréal, Trapèze		♦				◇	♦	♦
Didier, Dimathème		♦				♦	◇	◇
Hachette, Cinq sur cinq		♦		♦		◇		
Hatier, Pythagore	◇	♦	♦			♦	◇	♦
Hatier, Triangle (●▲)		♦	♦					◇
Nathan, Transmath (▲)				♦		♦		◇

Tableau 1 : Les stratégies d'enseignement dans les manuels scolaires

L'examen du tableau par colonne montre que pratiquement tous les auteurs abordent trois étapes : la conjecture du théorème, sa démonstration et la conséquence sur les mesures des angles inscrits qui interceptent le même arc. En revanche, la découverte de son utilité dans une situation problématique n'est proposée que par un manuel dont les auteurs laissent très peu d'initiative aux élèves. Il s'agit de montrer (par des mesures) qu'au football, l'angle de tir ne change pas si le joueur se déplace sur un cercle passant par les deux poteaux du but. Les fiches d'activités proposées sur Internet associées à des fichiers directement utilisables avec un logiciel de géométrie dynamique proposent la même situation mais laissent aux élèves davantage d'initiative *a priori*, nous précisons *a priori* car, comme toujours, c'est seulement l'observation en classe de la gestion du professeur qui permet de savoir quelles sont les marges de manœuvre réelles des élèves.

Nous pouvons donc conclure qu'à une exception près, toutes les stratégies proposées par les manuels scolaires consistent à conjecturer le nouveau savoir par l'observation, à le justifier et (nous n'en apportons pas la preuve ici) à l'utiliser dans des exercices de difficulté et de complexité variées. Nous utiliserons ces résultats pour analyser la stratégie mise en œuvre par le professeur que nous avons observé et qui n'a pas proposé de travail dans un environnement informatique.

#### 4. Les types de tâches qui peuvent être proposées aux élèves

Nous supposons que les questions et les problèmes qui ont été posés et/ou résolus à propos d'une notion influencent l'apprentissage de cette notion. Comme nous l'avons déjà dit, nous supposons, plus généralement, que l'apprentissage d'un élève dépend de son activité c'est-à-dire non seulement son action (ce qu'il fait) mais aussi ce qu'il dit, ce qu'il voit, ce qu'il entend et tout ce qu'il pense lorsqu'il fait, dit, voit et entend. L'activité que nous étudions est seulement celle qui se rapporte à un contenu mathématique et qui s'effectue en classe, individuellement ou collectivement, avec éventuellement des aides et plus généralement des médiations du professeur. Cette activité découle d'une tâche proposée par le professeur. Nous appelons *tâche* tout ce qui est demandé aux élèves par leur professeur. Une tâche est généralement définie par le but à atteindre. Dans le type d'analyse que nous menons, les seules tâches étudiées sont celles dont le but est directement lié à l'apprentissage de mathématiques : résoudre un problème, entièrement ou non, individuellement ou non ; écouter ou recopier un fragment du cours ou la solution d'un exercice ; formuler un résultat, une définition ou une propriété...

### *a) Les énoncés de problèmes*

Les énoncés de problèmes mathématiques possèdent des caractéristiques. Lorsque nous analysons un énoncé nous prenons en compte certaines caractéristiques. Nous utilisons principalement les outils qui, ces outils sont développés dans différents travaux d'Aline Robert.

Ces recherches nous conduisent à analyser un énoncé en nous attachant principalement :

- à la forme de l'énoncé : comment les données sont indiquées, comment les questions sont posées (problème ouvert, questions ouvertes/fermées, etc) ;
- aux méthodes, techniques et propriétés mathématiques à utiliser pour résoudre le problème : appliquer seulement ce qui vient d'être enseigné ou utiliser aussi des acquis, effectuer ou non des changements de cadre, de registre, de point de vue, de variable...
- aux adaptations à effectuer : reconnaître une configuration dans une figure complexe, décomposer une figure pour appliquer une propriété, ajouter une variable, mettre en relation deux théorèmes (comme ici le fait qu'un angle inscrit dont l'angle au centre associé est plat soit un angle droit et le fait qu'un triangle inscrit dans un demi-cercle soit rectangle)...

Des indications complémentaires sur la tâche proposée enrichissent l'analyse en permettant d'évaluer plus précisément quelle peut être l'activité d'un élève ou d'un groupe d'élèves qui s'engagerait dans la résolution :

- l'autonomie de l'élève dans la résolution du problème : indication de l'objectif du problème, choix d'une stratégie de résolution, découpage du problème, nature des aides... ;
- l'initiative laissée aux élèves : la formule, le théorème, le changement de variable ou le point à introduire est indiqué précisément, seulement suggéré ou passé sous silence.

### *b) Le cours*

Nous analysons aussi le texte du cours de mathématiques et sa production en classe. Comme y invitent les instructions officielles, les textes des cours sont très succincts au collège, tant celui des professeurs que celui des auteurs des manuels scolaires. Nous repérons donc essentiellement la structuration du cours par des titres et des sous-titres, les formes langagières utilisées dans les définitions ou les propriétés, l'illustration par des exemples ou des contre-exemples. Pour la production du texte du cours nous distinguons la formulation des savoirs construits en classe par les élèves à partir de questions posées en classe de la présentation de savoirs mathématiques n'ayant pas fait l'objet d'un questionnement préalable en classe.

## **III. Le professeur, son contexte professionnel et sa préparation**

L'analyse préalable conduit à prendre connaissance des possibilités qui s'offrent à un professeur pour construire ses séances d'enseignement et d'en peser les enjeux mathématique et didactique. Comme nous l'avons vu, le professeur générique est soumis aux contraintes du programme (le contenu mathématique à traiter, la progression des apprentissages et la durée de l'enseignement) mais, rappelons-le, ces contraintes ne sont pas les seules dont nous tenons compte même si elles constituent, avec les connaissances réelles des élèves de la classe, des éléments importants d'explication des choix effectués par l'enseignant. D'autres contraintes viennent en effet de l'exercice même du métier, à la fois parce qu'il y a une classe à gérer et parce qu'il y a un environnement social (des collègues, une administration, une inspection...) qui conduisent à certaines pratiques. L'analyse d'un enseignement peut aussi nécessiter de prendre en compte des caractères personnels de l'enseignant : sa formation, son expérience, son établissement et son ancienneté dans ce poste, ses représentations de l'enseignement et de l'apprentissage, sa tolérance au bruit, au risque etc.

Après avoir brièvement présenté le professeur observé et son environnement professionnel, nous analyserons son projet pour la séance en identifiant ses choix et en proposant des hypothèses pour les justifier.

## 1. Brève présentation du professeur dont nous étudions les pratiques

Le professeur est un enseignant débutant, nouvellement nommé dans un collège d'un Réseau d'Éducation Prioritaire<sup>8</sup> de la Seine-Saint-Denis (93) en charge d'une classe de troisième de réputation assez difficile à gérer et dont l'effectif est faible. Le professeur a été formé à l'IUFM de Créteil, donc celui de l'académie dans laquelle il exerce. Il est dynamique, enthousiaste et volontaire. Il a accepté sans difficulté que nous venions dans sa classe pour la filmer, analyser ses pratiques et utiliser la vidéo en stage de formation. La séance a été filmée vers la fin du deuxième trimestre, le professeur et les élèves se connaissaient donc déjà bien.

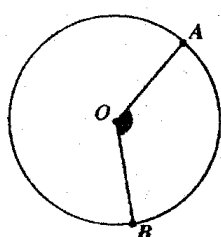
## 2. Présentation de la fiche d'activité distribuée aux élèves

La séance d'introduction du théorème de l'angle inscrit correspond à ce que les professeurs de mathématiques du second degré appellent couramment une « activité préparatoire », c'est la dénomination qu'utilisent aussi les auteurs des manuels. La séance comporte une partie où sont données la définition d'un angle inscrit et celle d'un angle au centre. Suivent un premier épisode dont l'objectif est de conjecturer le théorème, et un second épisode comportant deux objectifs : appliquer le théorème et conjecturer l'égalité des mesures de deux angles inscrits qui interceptent le même arc. Nous allons analyser la préparation du professeur à partir de la feuille distribuée aux élèves et utilisée en classe durant toute la séance, nous l'appellerons la « fiche d'activité ».

### Activité : Théorème de l'angle inscrit.

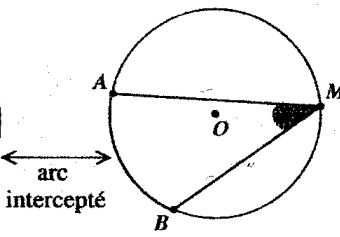
#### Définitions :

Fig. 1



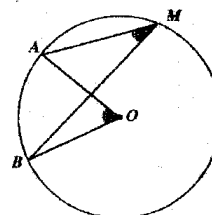
$\widehat{AOB}$  est un *angle au centre* qui *intercepte* le « petit » arc de cercle  $\widehat{AB}$ .

Fig. 2



$\widehat{AMB}$  est un *angle inscrit* qui *intercepte* le « petit » arc de cercle  $\widehat{AB}$ .

Fig. 3



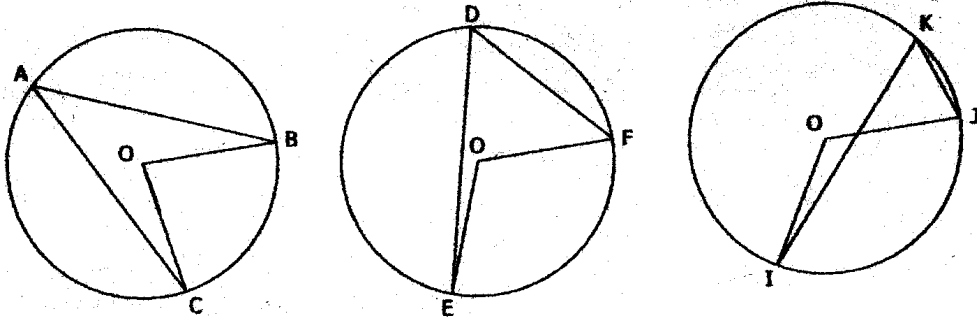
$\widehat{AOB}$  est l'angle *au centre* associé à l'angle inscrit  $\widehat{AMB}$  car ils interceptent le même arc de cercle.

<sup>8</sup> Réseau d'Éducation Prioritaire (REP) : réseau comprenant des établissements scolaires (du premier et du second degré) où des moyens supplémentaires sont accordés pour prendre en compte les difficultés sociologiques et scolaires des enfants accueillis et pour favoriser les relations entre les équipes pédagogiques.

### 1<sup>er</sup> épisode

Pour chaque cercle proposé :

- Nommer l'arc intercepté.
- Mesurer l'angle inscrit.
- Mesurer l'angle au centre associé.
- Placer un point M et mesurer l'angle inscrit de sommet M qui intercepte le même arc que l'angle au centre. Que remarque t-on ?



a. $\widehat{BC}$	a.	a.
b. $\widehat{BAC} =$	b.	b.
c. $\widehat{BOC} =$	c.	c.
d. $\widehat{BMC} =$	d.	d.

Conjecture :

.....

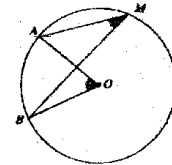
.....

.....

Ici se termine la première page, si bien que l'énoncé du théorème qui suit figure au verso.

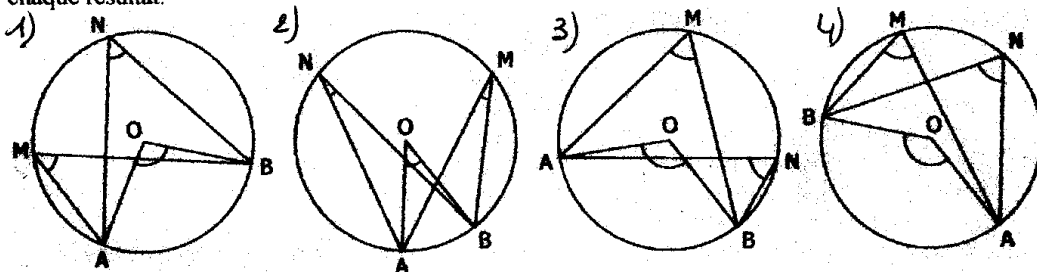
### Théorème de l'angle inscrit :

Dans un cercle, un angle inscrit est égal à la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc.



### 2<sup>e</sup> épisode

Sans effectuer la moindre mesure, retrouver les mesures de tous les angles. Justifie brièvement chaque résultat.



$\widehat{AMB} = \dots\dots$	$\widehat{AMB} = 20^\circ$	$\widehat{AMB} = \dots\dots$	$\widehat{AMB} = \dots\dots$
$\widehat{ANB} = \dots\dots$	$\widehat{ANB} = \dots\dots$	$\widehat{ANB} = \dots\dots$	$\widehat{ANB} = 70^\circ$
$\widehat{AOB} = 100^\circ$	$\widehat{AOB} = \dots\dots$	$\widehat{AOB} = 120^\circ$	$\widehat{AOB} = \dots\dots$

1) : .....

.....

.....

D'autres lignes en pointillés sont laissées pour justifier les résultats obtenus sur les trois autres figures, la seconde page se termine par l'énoncé de la conséquence du théorème.

On en déduit la propriété suivante :

**Angles inscrits interceptant le même arc :**  
Deux angles inscrits qui interceptent le même arc sont de même mesure.

### 3. Analyse de la préparation de la séance

L'analyse de la préparation de la séance consiste à confronter aux analyses préalables les choix du professeur concernant le champ mathématique de la séance, la stratégie d'enseignement et les tâches à proposer aux élèves. En utilisant éventuellement des informations complémentaires sur l'enseignant et son environnement professionnel, nous tentons de comprendre les choix effectués et de prévoir les difficultés que le professeur risque de rencontrer dans l'animation du scénario prévu. Cette analyse nous sera utile, dans un paragraphe ultérieur, d'une part pour comprendre le déroulement de la séance en fonction de son scénario et, d'autre part, le cas échéant, pour proposer des alternatives locales ou globales, envisageables par le professeur et qui laissent supposer une optimisation de l'enseignement : du travail de professeur et/ou de l'apprentissage des élèves.

#### a) *Le champ mathématique de la séance*

L'examen de la fiche d'activité montre les connaissances mathématiques nécessaires durant cette séance. Les élèves devront savoir reconnaître un cercle, son centre, un arc de cercle et leurs désignations respectives, il faut aussi qu'ils puissent reconnaître un angle, sa désignation par trois points et qu'ils soient capables de le mesurer, enfin ils devront connaître les rapports double et moitié et pouvoir les associer aux différentes notations qui les représentent. Bien que le professeur ait rédigé le théorème en français courant (*un angle inscrit est égal à la moitié de l'angle au centre*), les calculs à rédiger peuvent nécessiter l'utilisation successive de différentes écritures des rapports double et moitié ; comme nous l'avons remarqué durant l'analyse préalable, ces changements d'écriture peuvent poser des difficultés à certains élèves. Les situations proposées ne portent sur aucun grand arc, aucun angle rentrant ; les configurations les plus simples à identifier sont donc les seules proposées. Aucune démonstration des conjectures n'est demandée dans la fiche, si le professeur ne les demande pas en classe, les configurations sur les angles (angles supplémentaires, angles adjacents, angles du triangle isocèle) et les méthodes de calculs d'angles (relation de Chasles, somme des angles d'un triangle) ne sont d'aucune utilité. En ce qui concerne le texte du savoir à acquérir, les définitions d'angle inscrit et d'angle au centre ne sont pas rédigées, elles sont données sous la forme d'une illustration accompagnée d'une phrase de légende. Les illustrations ne portent que sur des petits arcs, l'angle au centre étant toujours saillant. Les phrases de légendes sont ambiguës car, comme nous l'avons souligné dans l'analyse préalable, l'unicité de l'angle au centre associé à un angle inscrit dans un cercle reste implicite.

Comment interpréter les choix du professeur pour délimiter le champ mathématique de sa séance ? Bien sûr, au regard de ce qui était possible, on devra commencer par deux remarques : d'une part les contenus traités figurent bien au programme de la classe de troisième et d'autre part, si le professeur se limite à ce qui est explicitement demandé dans la fiche, l'ensemble des contenus abordés semblent réduits au minimum. Avant d'aller plus loin dans l'analyse, indiquons trois hypothèses que nous énonçons sous forme de « principes » que les professeurs respecteraient pour préparer leurs cours, ces « principes » sont des résultats obtenus lors de recherches précédentes (Roditi, 2001).

- Le « principe de conformité au programme officiel » impose une contrainte tant pour le contenu enseigné que pour le rythme à observer. Cette conformité assure aux enseignants une légitimité professionnelle face à leurs élèves et leurs parents, à leurs collègues, et à leur administration.

- Le « principe d'efficacité pédagogique » traduit le fait que les professeurs n'abordent pas les contenus mathématiques avec lesquels les élèves éprouvent des difficultés et qui ne sont pas

indispensables à la séquence. Nous avons constaté, et nous interprétons ce constat comme une conséquence du principe d'efficacité pédagogique, que les professeurs ne proposent généralement pas de structurer les différents savoirs mathématiques : ils focalisent leur enseignement sur le nouveau : ce que les élèves doivent apprendre en plus. Par d'autres recherches, Aline Robert (2002, 2003) a montré que les professeurs font très souvent travailler les notions et les propriétés mathématiques de façon isolée, les énoncés qui demandent de travailler plusieurs notions mathématiques ensemble sont plus rarement proposés en classe.

- Le principe de « clôture du champ mathématique » découle du précédent. Les liens qui structurent les savoirs mathématiques font que certains contenus ne peuvent être introduits dans une séquence indépendamment les uns des autres. Ainsi, en déterminant ceux qui seront abordés dans une séance (séquence) les professeurs prennent en compte ces liens de telle manière que des objets mathématiques reliés seront soit exclus ensemble, soit traités ensemble. Prenons l'exemple, dans l'enseignement du théorème de l'angle inscrit, des angles rentrants et des grands arcs de cercle : les professeurs qui prévoient de montrer que deux rayons distincts [OA] et [OB] forment deux angles dont un est saillant et l'autre rentrant, seront inévitablement conduits à distinguer aussi les petits arcs des grands. De la même façon, un professeur qui, introduisant la notion d'arc intercepté, voudrait éviter de traiter des angles rentrants, devra limiter son enseignement aux petits arcs. Ainsi, les objets mathématiques du champ mathématique d'une séance (séquence) ne dépendent pas (ou peu) d'autres objets extérieurs à ce champ ; par référence aux travaux de Gérard Vergnaud, nous dirons que le professeur cherche à délimiter un champ mathématique qui constitue une partie « auto-close » du champ conceptuel de la notion étudiée.

Avec les deux derniers principes, tout se passe comme si les professeurs cherchaient à éviter des digressions qui nuiraient au déroulement prévu, qui seraient coûteuses en temps d'enseignement et qui desserviraient l'apprentissage des élèves. Ils garantiraient aussi une ligne directrice forte qui facilitera la gestion de la classe, notamment l'hétérogénéité des dynamiques individuelles de l'apprentissage, et lui permettra de rester dans ce que Janine Rogalski (2004) appelle « *l'enveloppe des trajectoires acceptables du déroulement* ».

Dans la séance qui nous occupe, nous pouvons suggérer une explication à l'absence du cas de l'angle inscrit qui intercepte un demi-cercle parmi les exemples proposés dans les deux épisodes. Cette configuration est au programme de façon explicite, on ne peut donc pas penser que le professeur l'ait oubliée. Elle constitue un lien avec la propriété du triangle rectangle apprise en classe de quatrième, le professeur aura sans doute préféré éviter les révisions de cette configuration que les élèves avaient peut-être complètement oubliée. De la même façon, à supposer que le professeur ne propose pas la démonstration en classe, on peut l'expliquer par sa difficulté ou par l'utilisation de propriétés liées aux angles qui ne sont peut-être pas disponibles aux élèves de sa classe. L'entretien avec le professeur nous le confirmera, il estime la démonstration inaccessible aux élèves à cause de sa longueur, de la diversité des outils qu'elle mobilise et de l'étude de cas qu'elle nécessite.

Devons-nous conclure que le professeur allège, tant que faire se peut, son enseignement pour s'adapter à son public en difficulté ? Quitte à rentrer dans une spirale infernale qui conduit à en donner toujours moins à ceux qui ont par conséquent besoin de toujours plus. Cela n'est pas certain car la stratégie d'enseignement du professeur peut générer des activités en classe qui n'apparaissent pas à la première lecture du projet. L'analyse du déroulement permettra de conclure.

#### *b) La stratégie d'enseignement du professeur*

La stratégie d'enseignement élaborée par le professeur comprend, comme dans deux manuels, une première application du théorème de l'angle inscrit après sa conjecture, application qui conduit à remarquer l'égalité des mesures de deux angles inscrits interceptant le même arc. La stratégie peut se décrire en utilisant le tableau dressé pour comparer les manuels :



	Stratégies							
Étapes	E1	E 2	E 2'	E3	E 4	E 4'	E5	E6
Descriptif des étapes	Problème introductif	Conjecture Th. Cor.		Preuve cas particulier	Preuve générale		Le triangle rectangle	Déduction du corollaire
Le professeur observé		♦	♦					◇

Tableau 2 : La stratégie d'enseignement élaborée par le professeur

On retrouve exactement la proposition du manuel de la collection « Triangle » dont l'équipe est composée de professeurs enseignant en collège et/ou à l'IUFM de Lyon et qui est une collection reconnue dans le milieu enseignant pour être accessible aux élèves et s'attaquer à leurs difficultés. Ce manuel propose aussi une application du théorème dans la phase d'activités préparatoires. Il sera donc intéressant de comparer les tâches proposées dans cette application et celle du professeur.

Avant de mener plus loin l'analyse, indiquons deux autres principes que nous avons proposés à partir des obtenus lors de recherches précédentes et qui aident à comprendre certains choix effectués lors de l'élaboration de la stratégie d'enseignement. La « nécessité de succès d'étape » et le « respect de l'attente des élèves » sont deux principes qui permettent au professeur de donner en classe un sentiment de réussite et de progrès dans l'apprentissage, sentiment qui assure un climat serein et permet à la classe de fonctionner.

- Le « principe de nécessité de succès d'étape » rend compte du fait que, très souvent, les professeurs segmentent leur enseignement de manière à mettre régulièrement l'élève en activité d'application de ce qui vient d'être enseigné. Les professeurs utilisent ces exercices pour évaluer régulièrement l'impact de leur enseignement à très court terme, afin d'adapter leur activité aux réactions des élèves, afin de garantir aussi la confiance et la sérénité de la classe.

- Le « principe de respect de l'attente des élèves » traduit un compromis du professeur entre trois volontés : laisser chercher les élèves, les faire réussir et ne pas perdre de temps. Tout se passe comme si les activités de recherche ne devaient pas excéder une certaine durée après laquelle les élèves prendraient leur travail comme un échec et attendraient du professeur qu'il expose et qu'il explique ce qu'ils n'ont pas su trouver seuls.

La fiche d'activité conçue par le professeur semble respecter ces principes qui montrent combien la composante cognitive et la composante médiative des pratiques sont imbriquées dans la réalité de l'enseignement.

La trajectoire prévue peut être ainsi globalement tracée :

- Le professeur donne les définitions de l'angle au centre et de l'angle inscrit, seulement dans le cas où l'arc est petit, aucune vérification de leur compréhension n'est proposée *a priori*, cela laisse penser que le professeur s'en assurera lui-même par un échange avec les élèves.
- Suit le premier épisode où les élèves vont être actifs, ils mesurent des angles et conjecturent le théorème de l'angle inscrit. Puis ils ont à le formuler par écrit sur les lignes en pointillés aménagées à cet effet.
- Durant la phase d'application du théorème, des activités de deux types sont attendues : des calculs numériques puis de brèves justifications.
- La séance se termine sur la conjecture de l'égalité des mesures des angles inscrits fondée sur les calculs précédents.

### c) Les tâches proposées aux élèves par le professeur

Pour analyser les tâches prévues, nous traiterons successivement les trois étapes proposées dans la fiche distribuée aux élèves : les définitions, le premier épisode puis le second.

## Les définitions

La fiche indique les définitions d'un angle au centre et d'un angle inscrit ainsi que de l'angle au centre associé à un angle inscrit donné. La première tâche proposée semble donc la lecture de ces définitions. Aucune vérification de leur compréhension n'est proposée *a priori*. Peut-être, durant le déroulement, une série d'exemples improvisée en interaction avec les élèves permettra de questionner chaque élément de la définition pour en préciser le sens.

Les trois figures indiquent les angles par leur sommet et par leurs côtés qui sont limités à des cordes du cercle, les légendes précisent l'arc intercepté. Le seul cas considéré est celui où l'arc est petit.

Les légendes comportent quelques confusions qui ont déjà été repérées dans des manuels et qui montrent l'absence de questionnement quant à l'existence et l'unicité de l'angle au centre associé à un angle inscrit donné. Les légendes précisent aussi que l'arc intercepté est « petit » sans que l'on sache si cette condition est nécessaire : un angle au centre est-il nécessairement saillant et un angle inscrit nécessairement aigu ? La précision concerne-t-elle seulement les figures proposées ? Cette nouvelle ambiguïté ne sera pas levée puisque, dans la fiche d'activité, tous les arcs interceptés sont « petits ». L'examen des exercices proposés lors des séances qui ont suivi<sup>9</sup> montre que le professeur n'a pas limité son enseignement à certains cas particuliers, il a bien proposé toute la gamme des cas de figure possibles.

Il émerge, en conclusion de cette analyse, que les attentes du professeur dans la situation d'apprentissage d'une définition ne laissent *a priori* que peu de place à la critique et au questionnement sur la nature exacte des objets définis. Remarquons encore une fois que ce n'est pas particulier au professeur observé puisque les auteurs des manuels ne sont pas plus rigoureux dans la rédaction des définitions.

## Le premier épisode

Puis vient le premier épisode où les élèves vont être actifs, ils mesurent des angles et conjecturent le théorème de l'angle inscrit.

La première activité attendue des élèves est de mobiliser les définitions qui viennent d'être données pour reconnaître et nommer l'arc intercepté, l'angle inscrit et l'angle au centre associé ; implicitement l'arc intercepté est le petit arc. Les élèves doivent aussi mesurer les deux angles.

La consigne suivante est de placer un point M sans autre indication puis de mesurer l'angle inscrit de sommet M qui intercepte le même arc que l'angle au centre ; cette consigne est

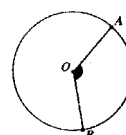
ambiguë car l'activité attendue des élèves est de placer un point M à la fois sur le cercle et en dehors du petit arc intercepté.

Jusqu'à ce moment les questions sont fermées, l'élève est guidé pas à pas pour réaliser des tâches où la seule adaptation nécessaire est la reconnaissance des éléments de la configuration formée d'un

## Activité : Théorème de l'angle inscrit.

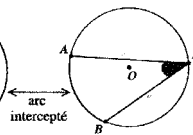
### Définitions :

Fig. 1



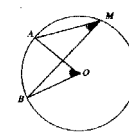
$\widehat{AOB}$  est un angle au centre qui intercepte le « petit » arc de cercle  $\widehat{AB}$ .

Fig. 2



$\widehat{AMB}$  est un angle inscrit qui intercepte le « petit » arc de cercle  $\widehat{AB}$ .

Fig. 3

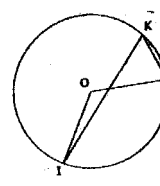
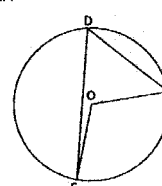
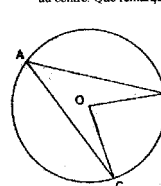


$\widehat{AOB}$  est l'angle au centre associé à l'angle inscrit  $\widehat{AMB}$  car ils interceptent le même arc de cercle.

### 1<sup>er</sup> épisode

Pour chaque cercle proposé :

- Nommer l'arc intercepté.
- Mesurer l'angle inscrit.
- Mesurer l'angle au centre associé.
- Placer un point M et mesurer l'angle inscrit de sommet M qui intercepte le même arc que l'angle au centre. Que remarque-t-on ?



a. $\widehat{BC}$	a.	a.
b. $\widehat{BAC} =$	b.	b.
c. $\widehat{BOC} =$	c.	c.
d. $\widehat{BAC} =$	d.	d.

### Conjecture :

.....

.....

.....

<sup>9</sup> L'examen de ces exercices ne figure pas dans ce texte consacré à la séance d'introduction. Les énoncés des exercices sont en revanche proposés en annexe.

angle inscrit et de l'angle au centre associé. Tout se passe comme si le professeur souhaitait que les élèves se conduisent comme des exécutants.

Au bas de la page, une rupture semble programmée : en ne donnant que le seul mot « conjecture » et des lignes en pointillés, le professeur demande aux élèves de réfléchir, de tirer une leçon de ce qu'ils viennent de réaliser. La question est ouverte. Il n'y a même pas de question. Vraisemblablement le théorème de l'angle inscrit et/ou sa conséquence sont attendus. Les lignes en pointillés aménagées sur la fiche d'activité conduisent à supposer qu'une autonomie de rédaction sera laissée aux élèves. C'est seulement lorsqu'ils retourneront la page qu'ils découvriront la formulation classique avec laquelle ils appliqueront le théorème durant deuxième épisode. L'activité attendue par le professeur semble donc que les élèves effectuent un constat : pour chacune des trois figures, l'angle inscrit de sommet imposé mesure exactement la moitié de la mesure de l'angle au centre associé, et l'angle inscrit de sommet M, placé cette fois arbitrairement sur le cercle de façon à intercepter le même arc, mesure, lui aussi, la moitié de la mesure de l'angle au centre associé. Deux possibilités peuvent alors être envisagées : soit les élèves conjecturent que, de façon générale, la mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de celle de l'angle au centre associé, soit ils conjecturent que deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure. Éventuellement, ils conjecturent les deux propriétés. Il restera au professeur, s'il décide d'en rester là, de conclure que la conjecture est un théorème admis.

Une question émerge alors : peut-on limiter une classe d'élèves de troisième à l'examen de trois figures particulières pour conjecturer une propriété générale ? Dans une classe de bon niveau, on peut supposer que les élèves ne confondront pas l'activité de conjecture et celle de déduction d'une propriété ; dans une classe comme celle du professeur dont nous analysons la séance, la distinction entre les deux activités ne va sûrement pas d'elle-même.

Nous allons tenter de mieux comprendre quel a été le choix du professeur. Les trois angles au centre proposés dans la fiche d'activité mesurent respectivement  $80^\circ$ ,  $110^\circ$  et  $140^\circ$ , ces angles sont saillants ce qui conduit aux configurations les plus faciles à reconnaître. Interprétons le choix de ces valeurs. En imposant les angles au centre de  $80^\circ$  et  $140^\circ$  dont les mesures sont des multiples de  $20^\circ$  le professeur s'assure que, malgré les imprécisions des dessins et des mesures, les valeurs annoncées par les élèves seront des multiples de  $10^\circ$  parce qu'elles « tombent juste » et qu'elles tombent près des graduations principales du rapporteur. La valeur  $110^\circ$  risque en revanche d'engendrer quelques réponses variées des élèves autour de  $55^\circ$  avec sans doute quand même un nombre important de  $55^\circ$  car cette mesure tombe sur une graduation secondaire du rapporteur. Le manuel Trapèze propose une activité analogue (c'est le seul et c'est celui qui est reconnu comme tenant compte des élèves en difficulté), les angles au centre mesurent  $90^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $300^\circ$ ,  $210^\circ$ . Les auteurs ont proposé des angles au centre rentrants mais cette différence mise à part le choix des valeurs semble lui aussi guidé par la gestion de la classe : on imagine sans peine, dans une classe de niveau faible, la difficulté d'un professeur ayant laissé les élèves libres de choisir l'angle au centre et devant prendre en compte, dans son échantillon de valeurs,  $82^\circ$  pour l'angle au centre et  $40^\circ$  pour l'angle inscrit ! Le choix apparaît donc celui d'une gestion où les élèves conjecturent la propriété sans en douter, plutôt qu'une gestion où la précision des mesures (donc aussi celle du travail réalisé par les élèves) doit être relativisée et où les élèves peuvent émettre des réserves quant à la validité de la propriété à conjecturer. Pour terminer l'analyse de la première partie, remarquons que rien n'empêche un professeur utilisant cette fiche d'activité d'envisager la démonstration du théorème comme une phase possible de la séance. Ce choix se heurte, dans une classe de niveau faible, à deux difficultés de nature différentes : les propriétés des angles qui doivent être mobilisées pour la démonstration n'ont pas été revues, les élèves auront sûrement été convaincus par les exemples d'égalités obtenues à partir des valeurs « trop bien choisies » et risquent de n'accorder que peu d'intérêt à la démonstration.

### Le second épisode

Avant d'aborder le second épisode, les élèves auront à lire le théorème de l'angle inscrit. Peut-être un moment sera pris en classe pour comparer la conjecture et l'énoncé classique du théorème.

La mise en page de cet énoncé laisse supposer que le professeur complètera la phrase (ou fera compléter) par un énoncé sous forme mathématique comme :  $\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{AMB}$ .

L'activité attendue des élèves durant le second épisode conduit à deux types de production : des réponses numériques, puis de brèves justifications. La distinction est à remarquer car la rédaction usuelle d'une solution mêle arguments et résultats. La consigne de travail, ainsi présentée, semble autoriser d'abord aux élèves le calcul de ce qu'ils savent (ou doivent savoir) calculer avant de demander de leur part une autre forme d'activité : la justification. La présentation choisie met donc

l'accent sur l'exigence de résultats argumentés ; cela peut surprendre dans une classe de troisième alors que la fin de l'année n'est pas très lointaine, cette exigence a sans doute été maintes fois répétée et maintes fois déçue. Durant la phase de calculs, les questions sont fermées, les productions écrites attendues sont complètement formatées par le tableau à compléter, l'activité attendue est une application directe du théorème. La configuration formée d'un angle inscrit et de l'angle au centre associé constitue la figure, elle n'est pas à isoler d'une figure complexe. S'il doit utiliser seulement le théorème de l'angle inscrit, l'élève doit remplacer, dans l'égalité du théorème, la désignation de l'angle dont la mesure est connue par sa mesure, considérer l'autre comme inconnue et la calculer. Il effectuera Durant ce second épisode, les élèves doivent, à quatre reprises, calculer les mesures de deux angles inscrits et d'un angle au centre qui interceptent le même arc connaissant une des trois valeurs. S'ils doivent utiliser seulement le théorème (ce qui est probable puisque c'est la seule compétence exigible d'après le programme de la classe), ils ne pourront utiliser que la mesure d'un angle inscrit est égale à celle de l'autre mais ils devront passer par l'angle au centre associé.

La deuxième phase est celle de la justification des calculs précédents. L'activité attendue des élèves est sans doute assez limitée car la consigne est de justifier « brièvement », les élèves comprendront sûrement que le professeur ne sera pas très exigeant. On peut supposer que le professeur attend que les élèves désigne l'angle inscrit et l'angle au centre associé en référence à l'arc intercepté, déduise du théorème une égalité qui conduira au calcul de l'angle cherché. Cette rédaction devra être répétée huit fois puisque huit mesures d'angles sont demandées.

La fin de cet épisode qui conclut la séance d'introduction au théorème de l'angle inscrit,

consiste à déduire du théorème l'égalité des mesures des angles inscrits qui interceptent le même arc. La rédaction de la fiche laisse penser que les élèves observeront l'égalité des mesures des angles inscrit interceptant le même arc à partir des résultats numériques obtenus. Cela confirme que les élèves ne devaient pas utiliser cette propriété dans les justifications. L'application du théorème a donc été conçue avec deux objectifs : préparer son utilisation et montrer son corollaire. Le professeur semble ainsi vouloir convoquer chez ses élèves une attitude face au travail réalisé : ne pas se contenter d'obtenir les résultats demandés mais approfondir la réflexion en s'interrogeant sur leur pertinence ou sur leur signification. L'absence de consigne de travail conduit à supposer que les élèves n'ont ni à conjecturer, ni à rédiger, ni à démontrer. L'activité attendue des élèves semble être de lire la propriété, éventuellement constater qu'elle se vérifie sur les quatre exemples proposés, peut-être aussi d'utiliser le théorème et la transitivité de l'égalité pour établir que les angles inscrits sont de même mesure. Cette présentation laisse donc une marge de manœuvre pour gérer la fin de la séance en fonction du temps disponible : le professeur peut demander de légitimer une telle

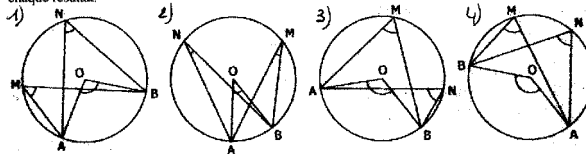
#### Théorème de l'angle inscrit :

Dans un cercle, un angle inscrit est égal à la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc.



#### 2<sup>e</sup> épisode

Sans effectuer la moindre mesure, retrouver les mesures de tous les angles. Justifie brièvement chaque résultat.



$\widehat{AMB} = \dots$	$\widehat{AMB} = 20^\circ$	$\widehat{AMB} = \dots$	$\widehat{AMB} = \dots$
$\widehat{AOB} = \dots$	$\widehat{AOB} = \dots$	$\widehat{AOB} = 120^\circ$	$\widehat{AOB} = \dots$

1) :  
.....  
.....

On en déduit la propriété suivante :

#### Angles inscrits interceptant le même arc :

Deux angles inscrits qui interceptent le même arc sont de même mesure.

conjecture et les accompagner éventuellement dans sa démonstration, au minimum il se contente d'affirmer le nouveau savoir à retenir.

#### **4. Prendre en compte des informations sur les élèves dans une analyse préalable**

Avant de conclure, remarquons qu'à plusieurs reprises, l'étude de la stratégie d'enseignement nous a conduit à prendre en compte le niveau des élèves auquel s'adresse le professeur. Dans une classe faible, le temps passé aux mesures et à la conjecture dans le premier épisode risque d'être suffisamment long pour empêcher de mener à bien la démonstration du théorème. Dans une classe faible, la preuve du théorème sera peut-être jugée inutile par les élèves si plusieurs exemples attestent du rapport entre la mesure de l'angle inscrit et celle de l'angle au centre associé alors que dans une classe de meilleur niveau, la formulation de la conjecture appellera sans doute la recherche d'une preuve.

Nous voudrions anticiper encore quelque peu sur l'analyse du déroulement pour commenter le choix de présentation générale de la fiche d'activité. Pour ce faire, encore une fois, nous aurons besoin de prendre en compte le fait que le professeur enseigne dans un collège de REP, avec une classe jugée difficile. Au-delà de l'exemple que nous étudions ici, en tant que chercheur, nous soulignons la nécessité qu'il y a parfois à prendre en compte des informations sur les élèves, même pour mener une analyse préalable.

L'examen global de la fiche montre qu'elle se présente à la fois comme un support de travail en classe pour les élèves et comme un document à conserver pour le travail personnel. Le travail est très décomposé, très guidé si bien que la fiche possède un aspect stratégique bivalent quant à la gestion de la classe :

- on peut envisager une classe dont le travail autonome des élèves est habituel. Une fois le travail effectué, les élèves comparent leurs résultats et l'activité de la classe entière est consacrée au bilan des expérimentations, à la recherche de pistes pour la démonstration, au choix de la formulation du théorème, etc.

- on peut aussi imaginer (et c'est ici une situation probable) une classe de niveau faible regroupant des élèves dont l'engagement dans le travail nécessite une certaine pression de l'enseignant. La décomposition du travail permettrait alors de marquer les étapes franchies par la classe, la fiche laisserait à tous les élèves des notes complètes sur travail effectué, la rédaction assez complète pallierait éventuellement le manque de livres scolaires emportés dans les cartables. Si on envisage une ambiance potentiellement conflictuelle, la fiche de travail pourrait alors permettre d'une part aux plus récalcitrants de rester penchés sur leur feuille lorsqu'ils sont observés par le professeur afin d'éviter toute sollicitation et d'autre part à ceux qui souhaitent travailler de le faire sans attirer l'attention sur eux (on sait combien il est difficile dans certains collèges de mettre en valeur le travail des élèves parce qu'il ne faut pas qu'ils apparaissent comme complices du système scolaire auquel la « règle » serait de s'opposer).

À ce stade de l'analyse et compte tenu du niveau de la classe, la stratégie d'enseignement du professeur semble pouvoir se résumer ainsi : limiter le plus possible la nécessité de connaissances antérieures afin d'engager le maximum d'élèves dans la séance, les rendre actifs en classe pour découvrir, formuler et appliquer le savoir nouveau, limité à l'essentiel et épuré de toutes difficultés éventuelles. Le déroulement nous permettra d'une part de confirmer ou d'infirmer cette conclusion et d'autre part d'analyser l'adéquation entre le projet et sa mise en œuvre en classe avec les élèves.

#### **IV. En classe, le déroulement du scénario**

Ce paragraphe consacré au déroulement en classe de la séance propose une description générale des réponses aux questions soulevées dans l'analyse du scénario, puis une analyse des difficultés rencontrées par le professeur et de leur gestion. Cette partie du travail d'analyse est fondamentale pour deux raisons :

- en ce qui concerne l'apprentissage, nous avons jusqu'à présent étudié les tâches proposées aux élèves et nous avons signalé combien la gestion pouvait influencer sur l'activité réelle des élèves ;

- en ce qui concerne les pratiques du professeur, nous avons besoin d'éléments sur le déroulement pour savoir quels sont *in fine* les choix effectués et pour tenter de les comprendre.

Avant de débiter l'étude du déroulement, précisons que l'activité réelle de chaque élève reste inaccessible puisqu'elle s'effectue principalement en pensée. L'observation permet de recueillir les productions de certains élèves, soit parce qu'ils écrivent au tableau, soit parce qu'ils s'expriment oralement, soit parce que la caméra a pu filmer leurs notes personnelles à un moment donné. Ainsi étudierons-nous l'activité *potentielle* des élèves qui est une reconstitution de ce que pourrait être l'activité réelle à partir de la tâche proposée et de la production issue de l'activité réelle. Pour les élèves dont on ne connaît pas la production, nous distinguons plusieurs possibilités pour l'activité *potentielle* : soit elle se fonde sur l'hypothèse que les élèves s'engagent dans la tâche, autrement dit qu'ils jouent le jeu auquel le professeur l'invite, soit elle se fonde sur l'hypothèse que les élèves ont une activité *a minima* c'est-à-dire la plus petite activité qui permet à l'élève d'être « inattaquable » parce que le travail est fait.

### **1. Description globale de la séance, réponses aux questions soulevées par le scénario**

Le scénario prévu s'est déroulé dans sa totalité durant la séance, aucun complément n'a été improvisé et la fiche d'activité n'a subi aucune adaptation en classe. Comme le laissait prévoir l'analyse du scénario, le professeur a projeté sur un tableau blanc la fiche donnée aux élèves, les lignes en pointillés ont été complétées directement sur le tableau blanc par le professeur ou par des élèves si bien que la classe pouvait comparer le modèle proposé au tableau avec les réponses écrites sur la fiche. Les relations dans la classe ne sont pas tendues malgré quelques moments d'agitation au début de la séance et à chaque changement d'activité. Le retour à l'ordre s'effectue après quelques remarques du professeur.

La lecture des définitions dure trois minutes. C'est le professeur qui lit le texte, lentement ; il indique la position des points de chaque figure mais il évite de soulever les questions délicates des angles saillants ou rentrant, des arcs grands ou petits. Comme pour les éviter plus sûrement encore, le professeur termine la lecture par une phrase interro-négative : « Vous n'avez pas de question ? » L'hypothèse que nous avons formulée quant à une série d'exemples qui permettrait de préciser le sens de la définition est donc à rejeter : le professeur a choisi d'écarter les configurations où les arcs interceptés sont des grands arcs et où les angles sont rentrants. Ainsi, pour cette séance d'introduction, le professeur n'a-t-il focalisé son enseignement que sur la relation « double - moitié » entre la mesure de l'angle au centre et celle des angles inscrits interceptant le même arc.

Le premier épisode dure 12 minutes. Dès le début de l'épisode, le professeur précise oralement que le point M ne doit pas être placé sur le petit arc du cercle et il invite les élèves à se mettre rapidement au travail : mesure d'angles et tracés géométriques. Les mesures des angles sont effectuées rapidement par quelques élèves qui indiquent les valeurs à ceux qui ne disposent pas de rapporteur. Les résultats proposés confirment la pertinence du choix du professeur pour éviter de poser la question de l'approximation liée à l'activité de mesure, seule la valeur  $55^\circ$  qui ne tombe au voisinage d'une graduation principale est un sujet de désaccord. Le professeur impose la valeur  $55^\circ$  en indiquant que c'est celle qu'il a trouvée. Pourtant, comme nous le verrons en détail plus loin, la conjecture du théorème n'émergera pas aussi facilement que prévu.

L'analyse du scénario avait fait émerger un doute quant à l'utilisation de la fiche par le professeur : activité de classe dans une gestion dialoguée professeur - élèves ou activité individuelle des élèves synthétisée pour la classe entière ? Le doute se lève à l'examen du déroulement car le professeur dispose de la même fiche que ses élèves sur un transparent projeté en classe sur un tableau blanc, il peut compléter ou faire compléter la fiche qui se présente alors comme un modèle. La gestion de ce premier épisode est celle d'un cours dialogué qui constitue un moyen adapté pour pallier le manque de rapporteurs disponibles en classe : ceux qui n'en ont pas peuvent noter les mesures trouvées par leurs camarades, les valeurs indispensables à la poursuite du travail sont ainsi mises rapidement à disposition de l'ensemble de la classe.

Le second épisode dure 30 minutes : 22 minutes sont consacrées à la recherche des élèves, la mise en commun des résultats et la correction de la rédaction occupent les 8 minutes restantes. Dans ce second épisode, la gestion est une alternance entre un travail individuel accompagné du professeur qui circule dans les rangs pour stimuler le travail et aider à la résolution des problèmes, et un travail en classe entière où les élèves comme l'enseignant peuvent compléter la fiche projetée au tableau. Comme l'observation de la vidéo le montre et comme nous allons tenter de le comprendre, l'activité de certains élèves reste très en deçà des prévisions. L'explication générale tient au fait que pour réaliser cette tâche, les élèves sont placés devant une alternative : choisir entre une multiplication et une division par 2. Or, pour décider, il suffit de remarquer que dans chaque figure il y a deux types d'angles, un « grand » et deux « petits » ; il reste alors à multiplier ou diviser suivant que c'est le grand ou le petit qui est calculé. Pour ces élèves, il convient d'envisager l'activité *a minima* évoquée ci-dessus : ici, pour compléter la fiche, il n'est ni indispensable d'avoir identifié l'arc intercepté ni d'avoir vérifié que les angles sont soit inscrits dans un cercle soit au centre de ce cercle.

## 2. La conjecture du théorème, un incident imprévu

Les élèves ont obtenu les mesures demandées et disposent maintenant d'un tableau de trois colonnes, chacune d'elles comportant deux valeurs égales (les mesures des angles inscrits) et une valeur égale au double des précédentes (la mesure de l'angle au centre).

C'est seulement l'homogénéité du tableau que souligne le premier élève à intervenir : « c'est presque partout pareil » dit-il sans que l'on puisse savoir s'il pense au théorème qui par trois fois se répète dans le tableau ou s'il remarque son corollaire, les deux valeurs égales de chaque colonne. Le professeur souhaite voir le théorème apparaître, il relance le travail de la classe en induisant la recherche d'une relation numérique entre les valeurs de chaque colonne du tableau. Le deuxième élève à intervenir propose alors la conjecture suivante : « quand on additionne les deux petites mesures, on trouve la plus grande. » La formulation reste liée au contexte des trois séries numériques disponibles mais conduit à la généralisation suivante : « La somme de deux angles inscrits est égale à l'angle au centre ». Cette proposition constitue un incident car si elle devait être travaillée en classe, elle détournerait le professeur de l'itinéraire prévu.<sup>10</sup> Tout en acceptant comme correcte la réponse de l'élève le professeur ne la retiendra pas mais, par un jeu de formulations successives à partir de celle de l'élève, il prendra lui-même en charge l'énoncé de la propriété : la somme des deux petites valeurs deviendra la somme des valeurs égales qui deviendra elle-même le produit par deux de chaque petite valeur puis le double de la mesure de l'angle angle inscrit, quel que soit cet angle.<sup>11</sup>

La gestion de l'incident par le professeur est conforme à son projet de ne pas démontrer le théorème de l'angle inscrit. En acceptant à la lettre la conjecture de l'élève, le professeur s'engageait dans une activité de preuve de l'équivalence du théorème et de la conjecture. Il a validé la première conjecture, fermant ainsi rapidement le débat par la réussite d'un élève, ce qui est valorisant pour la classe et aussi, par voie de conséquence, pour le professeur.

La phrase énoncée est recopiée sur le tableau blanc à l'emplacement prévu pour la conjecture, les élèves n'ont plus qu'à recopier le texte en utilisant les lignes en pointillés. Cette copie dure cinq minutes durant lesquelles le professeur circule dans les rangs pour vérifier la qualité du travail de chacun, pour corriger les fautes de copie de certains, pour engager les plus rétifs à compléter la fiche distribuée. Le professeur introduit alors la phase suivante du travail en demandant de retourner la feuille. Les élèves découvrent que la phrase trouvée en classe est conforme au texte inscrit sur la fiche d'activité. Cet aller et retour entre la phrase manuscrite et la phrase imprimée, tient lieu d'institutionnalisation ; il confirme aussi la réussite de la classe.

---

<sup>10</sup> Un simple examen montre qu'elle conduit pourtant au théorème cherché ainsi qu'à son corollaire.

<sup>11</sup> L'échange entre le professeur et l'élève figure en annexe.

### **3. Application du théorème : pour beaucoup d'élèves, encore un travail a minima**

Le second épisode consiste à appliquer le théorème de l'angle inscrit qui figure en haut de la page sur laquelle les élèves doivent inscrire leurs réponses. Après quelques instants laissés aux élèves pour prendre connaissance du travail demandé, l'énoncé est lu à haute voix par le professeur qui interdit l'utilisation des rapporteurs puisque la consigne stipule qu'aucune mesure ne doit être effectuée. Nous interprétons cette interdiction comme une invitation au travail qui répond au désengagement manifeste de plusieurs élèves qui n'apportent jamais leur matériel. Contre les élèves qui tentent d'en faire le moins possible tout en évitant le conflit, le professeur « marque un point » qui ne passe pas inaperçu dans la classe !

La revanche est prise durant le quart d'heure suivant. Le professeur circule dans la classe, comme pour aider les élèves en difficulté ; en fait, il passe à chaque table et les élèves restent passifs tant que le professeur n'est pas au travail avec eux. Ils plaisantent ou règlent leurs affaires personnelles en respectant les limites sonores imposées, si bien que le professeur ne les reprend pas. L'analyse du discours des élèves montre que le travail effectué est insuffisant pour permettre l'apprentissage du théorème et de son utilisation : les élèves se contentent d'effectuer la tâche pour elle-même, multipliant ou divisant par 2 suivant qu'ils cherchent un grand angle ou un petit. Jamais les élèves n'identifient d'angle au centre ni d'angle inscrit. Leur résistance au travail est parfois telle que c'est le professeur lui-même qui les invite à repérer les petits angles et le grand pour conclure.

En conclusion de la première phase de ce deuxième épisode, nous proposons l'interprétation suivante : les élèves ne travaillent pas volontiers, le professeur doit résoudre un conflit entre la réussite, qui garantit fonctionnement de la classe, et l'apprentissage des élèves, qui est l'objectif de l'enseignement du professeur. Malgré la frustration professionnelle certaine qui en découle, l'apprentissage est différé au profit de la réussite immédiate.

La deuxième phase est celle des justifications. Une dizaine de minutes avant la fin de la séance, presque tous les élèves ont inscrit les valeurs cherchées mais aucune des justifications demandées. Quelques élèves semblent avoir réalisé l'ensemble du travail demandé puisque le professeur valide leur production et leur distribue discrètement une feuille d'exercices. Le professeur écrit rapidement sur le tableau blanc les valeurs des angles, les élèves les plus rétifs recopient sur leur fiche le modèle projeté. Puis le professeur rédige au tableau les justifications que pratiquement personne n'a cherchées. La séance se termine par la lecture du corollaire qui figure au bas de la page, les élèves inattentifs copient lentement. Comme s'il avait un dernier espoir, le professeur interroge la classe au sujet de l'affirmation qui vient d'être prononcée : « ça semble vrai, non ? ». Puis le professeur ajoute que le corollaire est admis. Mise en conformité de son enseignement avec les instructions officielles : le professeur est libre d'apporter ou non la démonstration des propriétés énoncées en classe en fonction du niveau des élèves, mais il doit indiquer que la propriété est admise s'il choisit de ne pas la démontrer.

Au bout du compte, la fiche d'activité et l'utilisation qu'en fait le professeur agissent comme une garantie de fonctionnement de la classe mais aussi comme un piège si l'on pense à l'apprentissage de nombreux élèves. La tâche est tellement décomposée et ce qui reste à faire est tellement infime que les plus rétifs peuvent répondre sans même faire référence aux nouveaux outils. La convention implicite est que la fiche doit être complétée correctement, le professeur doit permettre d'y parvenir. En projetant la fiche et en la complétant au tableau blanc, le professeur satisfait ses obligations ; en recopiant le modèle proposé, les élèves satisfont la leur. Le produit fini est impeccable. Pour autant, parce que le bruit et l'agitation sont maîtrisés, certains élèves, discrètement, ont sans doute appris à reconnaître un angle inscrit interceptant un petit arc de cercle et l'angle au centre qui lui est associé, appris aussi à utiliser la relation qui les lie pour déterminer la mesure de l'un connaissant celle de l'autre. Les exercices que le professeur proposera durant les séances suivantes sont d'un niveau tout à fait conforme aux compétences à acquérir définies par le programme.



## Conclusion

L'analyse qui vient d'être menée nous a permis de comprendre la séance, au sens où nous l'avons défini dans la présentation de nos objectifs : les possibles ont été repérés, les choix du professeur pour élaborer le scénario de la séance ont été explicités et analysés en référence à ces possibles. L'animation du projet en classe est conforme au projet élaboré, son analyse a permis de comprendre les pratiques du professeur en fonction des diverses contraintes institutionnelles et sociales et d'en tirer quelques hypothèses sur l'apprentissage des élèves : on retiendra notamment un scénario où le savoir nouveau est montré sur des exemples, une gestion de l'hétérogénéité qui permet aux élèves qui le souhaitent de travailler sans être distingué dans une classe globalement rétive, ainsi qu'une négociation permanente du professeur entre la réussite immédiate et l'apprentissage des élèves. Le cadre global de l'analyse permet de poser plusieurs questions : quelles améliorations peut-on envisager ? avec les mêmes contraintes institutionnelles et sociales, qu'est ce qui aurait été possible pour ce professeur ? pour un autre professeur ?

Aline Robert et Janine Rogalski ont conçu une double approche didactique et ergonomique des pratiques enseignantes, des outils adaptés ont été élaborés et leur utilisation a montré que les analyses ainsi produites sont très respectueuses de la réalité des pratiques ordinaires car elles ne restent pas fondées seulement sur des éléments didactiques ou épistémologiques. Les analyses ainsi produites permettent d'élucider plus précisément la « problématique professionnelle » d'un enseignant dont la séance est étudiée : l'enchevêtrement des questions qui se posent au professeur pour cette séance, les choix qu'il effectue et les réponses qu'il élabore pour tenir compte des objectifs d'enseignement (ceux des programmes qui ont une portée nationale et ceux que se construisent les enseignants au vu des connaissances antérieures de leurs élèves), des contraintes institutionnelles et sociales, des contraintes du métier y compris celles qui sont spécifiques à l'établissement d'exercice, de son ambition personnelle et professionnelle pour lui-même et pour ses élèves, etc.

Pour terminer, compte tenu de plusieurs expériences menées en formation initiale et continue, il nous apparaît que de telles analyses sont utiles en formation parce qu'elles conduisent à la fois à comprendre la cohérence d'ensemble et à identifier des marges de manœuvre qui sont des sources de questionnement de l'enseignement : le confirmer éventuellement, penser à des améliorations du scénario ou du déroulement, ouvrir aussi la voie vers des alternatives locales ou plus globales. Ces modifications peuvent réduire les tensions entre un projet et son déroulement en classe. Elles peuvent être plus radicales, par exemple pour répondre à des difficultés d'apprentissages des élèves ou de certains d'entre eux. La prise en compte du métier en formation, l'importance de la dimension personnelle des pratiques, l'impact de la formation et l'effet des modalités sur la construction des pratiques sont autant de questions sur la formation initiale et continue qui nourrissent actuellement des travaux de recherche.

## BIBLIOGRAPHIE

- BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, Grenoble : La pensée sauvage éditions.
- CHARLOT B., BAUTIER E. & ROCHEX J.-Y. (1992), *École et savoir dans les banlieues... et ailleurs*, Armand Colin : Paris.
- CHEVALLARD Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en didactique des mathématiques* 12/1 (73-112), Grenoble : La pensée sauvage éditions.
- CHEVALLARD Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques* 19/2 (221-266), Grenoble : La pensée sauvage éditions.
- CLAROU Philippe ; CAPPONI Bernard ; BESSOT Annie. Dir. ; CAPPONI Bernard. Dir (1999), *Angle... inscrit - Angle... au centre*, Petit x Hors série « Activités mathématiques pour le collège 1993-1998 ».
- CLAROU Philippe ; CAPPONI Bernard (1997), *Activité... deux tangentes*, Petit x n°44 (50-51).
- CLOT Y. (1999), *La fonction psychologique du travail*, Paris : PUF.
- DOUADY R. (1987) Jeux de cadres et dialectique outil/objet, *Recherches en didactique des mathématiques* 7/2 (5-32), Grenoble : La pensée sauvage éditions.
- GASSER Jean-Luc (1992), *Visions angulaires sur un terrain de football*, Bulletin de l'APMEP n°386 (543-549).
- INRP & ADIREM (2003), *Faire des maths en classe ? Didactique et analyse de pratiques enseignantes*, INRP.
- JOSSE E. & ROBERT A. (1993), Introduction de l'homothétie en seconde, analyse de deux discours de professeurs, *Recherches en didactique des mathématiques* 13/1-2 (119-154), Grenoble : La pensée sauvage éditions.
- LEPLAT J. (1997), *Regard sur l'activité en situation de travail - Contribution à la psychologie ergonomique*, Paris : PUF.
- MARGOLINAS C. (1995), La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations, in Margolinas Eds, *Les débats en didactique des mathématiques* (89-103), Grenoble : La pensée sauvage éditions.
- MARGOLINAS C. (2002), Situation, Milieux, Connaissances, Analyse de l'activité du professeur, in *Actes de la 11<sup>e</sup> Ecole d'Été de Didactique des mathématiques - Corps - 21 - 30 août 2001* (141-155), Grenoble : La pensée sauvage éditions.
- NIMIER J. (1988), *Les modes de relations aux mathématiques*, Paris : Méridiens Klincksieck.
- PERRIN M.-J. (1999), Problèmes d'articulation de cadres théoriques, *Recherches en didactique des mathématiques* 19/3 (279-322), Grenoble : La pensée sauvage éditions.
- RICHETON Jean-Pierre (2001), *Géométrie en classe de seconde*, Bulletin de l'APMEP n°435 (445-455).
- ROBERT A. (1998), Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au Lycée et à l'Université, *Recherches en didactiques des mathématiques* 18/2 (139-190), Grenoble : La pensée sauvage éditions.
- ROBERT A. (2003), *Des tâches prescrites aux activités des élèves, en passant par les pratiques des enseignants de mathématiques (second degré)*, Document pour la formation des enseignants n°2, Paris : IREM de Paris 7.

- ROBERT A. (2004), *Des analyses d'une séance en classe (à partir d'une vidéo) aux analyses des pratiques des enseignants de mathématiques : perspectives en formation d'enseignants*, Document pour la formation des enseignants n°3, Paris : IREM de Paris 7.
- ROBERT A. & ROGALSKI J. (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *La revue canadienne des sciences, des mathématiques et des technologies*, vol 2 .4.
- ROBERT A. & ROGALSKI M. (2002), Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices ? Le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion en classe, *Petit x* n°60.
- RODITI E (1995), *Le tableau noir, un outil pour la classe de mathématiques*, Cahier DIDIREM n°30, Paris : IREM de Paris 7.
- RODITI E. (2001), *L'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième, étude de pratiques ordinaires*, Thèse de didactique des mathématiques de l'Université de Paris 7.
- RODITI E. (2003), Régularité et variabilité des pratiques ordinaires d'enseignement. Le cas de la multiplication des nombres décimaux en sixième, *Recherches en didactiques des mathématiques* 23/2 (183-216), Grenoble : La pensée sauvage éditions.
- ROGALSKI J. (2003), Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert, *Recherches en didactiques des mathématiques* 23/3 (343-388), Grenoble : La pensée sauvage éditions.
- VYGOTSKI (1985), *Pensée et langage*. Paris : Messidor.

## ANNEXE

### La conjecture du théorème, transcription de l'interaction verbale

- P : Alors ensuite il fallait faire une conjecture. Nadir ! Formuler une conjecture par rapport au dessin obtenu. Guillauman, qu'est-ce qu'on remarque ? Qu'est-ce qu'on remarque dans les trois colonnes ? Chacune prise séparément ?
- E : Si on additionne quarante et quarante, ça fait quatre-vingts.
- P : Alors tu proposes [silence] tu proposes d'additionner quarante et quarante ?
- E : Ouais [silence]
- P : Donc de faire quarante fois deux ? Donc on trouve quatre-vingts en faisant quarante fois deux dans la première. Dans la deuxième, est-ce que ça se vérifie ?
- E : Ouais pareil, on [coupure de parole]
- P : cinquante-cinq fois deux égale cent dix. Samira tu te mets au travail, c'est fini ! Dans la dernière, est-ce que cent vingt c'est deux fois soixante ?
- E : Oui [coupure de parole]
- P : Aussi ! ça c'est une chose. Donc il semblerait que la mesure de l'angle au centre  $\widehat{BOC}$  soit égale, Propriam ? La mesure de l'angle au centre, à chaque fois, elle a l'air d'être le ? [silence environ 5 secondes] Le double de l'angle inscrit. On peut donc écrire la conjecture.